复旦大学附属中学 2016 学年第一学期高一年级期末试卷

试卷分析

学科：数学　考试时间：100 分钟，满分 120 分

本次期末考试整体难度不大，多为基础题和中档题。其中 11、12、14、20 和 21 为较难题。试卷的考查范围集中在函数的问题，包括函数的定义域、值域、奇偶性、单调性和周期性，幂指对函数的图像与性质，抽象函数的性质判断，以及函数与方程的数学思想问题，同时涉及到一些集合的运算、不等式的恒成立问题等。考生复习的重点应该放在函数的奇偶性的判断与应用、利用图像判断单调性、利用复合函数性质判断单调性、幂指对函数的图像与性质、指对方程与不等式、函数与方程以及求解反函数等问题上。为了应对较为综合的题目需要将期中之前的解不等式与不等式的恒成立问题也进行相应的复习，还需要复习抽象函数的赋值法，详情参见下方具体试题与试题的考点分析。

一、填空题（每题 4 分，共 48 分）

1．函数 $y=\sqrt{\log_2(3x-2)}$ 的定义域是______________.

【答案】$[1,+\infty)$

【考点分析】本题为基础题，考查了函数的自然定义域，只要找到函数中所隐藏的所有范围即可。本题中所隐含的范围有偶次根被开方数非负，对数的真数大于 0。

2．已知函数 $f(x)=\begin{cases} f(x-5)，x\geqslant 0 \\ \log_{\frac{1}{3}}(-x)，x<0 \end{cases}$，则 $f(2017)$ 等于______________.

【答案】-1

【考点分析】本题为基础题，考察了函数的周期性以及分段函数。当 x 大于等于 0 时周期为 5，故 f(2017)=f(2)=f(-3)= $\log_{\frac{1}{3}}3$ =-1

3．已知函数 $f(x)=x^{\frac{1-a}{3}}$ 的定义域是非零实数集，且在 $(-\infty，0)$ 上是增函数，在 $(0，+\infty)$ 上是减函数，则最小的正整数 $a=$______________.

【答案】3

【考点分析】本题为基础题，考察了幂函数的定义域，奇偶性以及单调性，定义域为非零实数集，在 $(0，+\infty)$ 上是减函数，则 $\frac{1-a}{3}<0$，且在 $(-\infty，0)$ 上是增函数，故 f(x)是偶函数，则 1-a 为偶数，故 a 为奇数，所以最小值为 3。

4．设函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，且 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}(x\neq -1)$，则 $g(x)=$__________.

【答案】$\frac{1-x}{1+x}(x\neq -1)$

【考点分析】本题为基础题，考察了反函数的性质即求解步骤，原函数与反函数关于 y=x 对称，故 g(x)是 f(x) 的反函数，求反函数第一步求原函数的值域，第二步反解 x 关于 y 的函数关系，第三步交换 x , y。

5．函数 $y=\log_{0.1}\left(x^2-x-2\right)$ 的递增区间是____________.

【答案】$(-\infty,-1)$

【考点分析】本题为中档题，考察了复合函数单调性的判断，同时考察了对数函数的定义域问题，该函数是二次函数和对数函数复合得到，根据“同增异减”法则，即求二次函数 x^2-x-2 的递减区间，再考虑到定义域问题，求出二次函数与 x 轴的交点，得到答案 $(-\infty,-1)$ 。

6．函数 $y=\lg\left(\dfrac{2}{1+x}-1\right)$ 的图像关于__________________对称.

【答案】$(0,0)$

【考点分析】本题为基础题，考察了函数的奇偶性，将函数化简为 $f(x)=\lg(\dfrac{1-x}{1+x})$，其定义域关于原点对称，且 $f(\text{-}x)=\lg(\dfrac{1+x}{1\text{-}x})=-\lg(\dfrac{1-x}{1+x})=-f(x)$，故函数是奇函数，关于原点中心对称。

7．已知 $\lg 2=a$，$\lg 3=b$，用 a，b 的代数式表示 $\log_{12}25=$_______________.

【答案】$\dfrac{2-2a}{b+2a}$

【考点分析】本题为基础题，考察了对数的换底公式以及运算法则，把所求对数的底数换为 10，再配合对数的运算法则可得，$\log_{12}25=\dfrac{\lg 25}{\lg 12}=\dfrac{2\lg 5}{\lg 3+2\lg 2}=\dfrac{2-2\lg 2}{\lg 3+2\lg 2}=\dfrac{2-2a}{b+2a}$ 。

8．函数 $f\left(x\right)=\log_a\left(x+1\right)\left(a>0，a\neq 1\right)$ 的定义域和值域都是 $\left[0，2\right]$，则 $a=$____________.

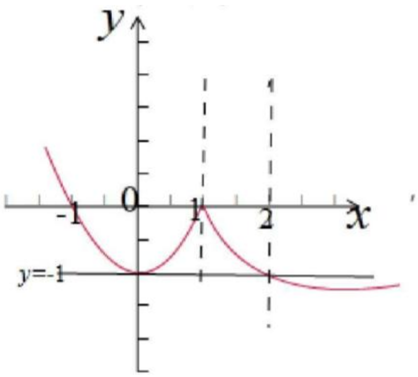
【答案】$\sqrt{3}$

【考点分析】本题为基础题，考察了对数函数的值域问题， $x\in[0,2]\Rightarrow x+1\in[1,3]$，故当 x=0， $f(0)=0$，函数递增，故 $\log_a 3=2\Rightarrow a^2=3\Rightarrow a=\sqrt{3}$

9．已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2-1，x<1\\ \log_{\frac{1}{2}}x，x\geqslant 1\end{cases}$．若关于 x 的方程 $f\left(x\right)=k$ 有三个不同的实数根，则实数 k 的取值范围是____________________.

【答案】$(-1,0)$

【考点分析】本题为中档题，考察了函数与方程的数学思想。画出分段函数 $f(x)$ 的图像，可得 $k\in(-1,0)$ 。



10．若 $f(x)=\begin{cases} a^x，x>1 \\ \left(4-\dfrac{a}{2}\right)x+2，x\leqslant 1 \end{cases}$ 是 R 上的单调递增函数，则实数 a 的取值范围为________________.

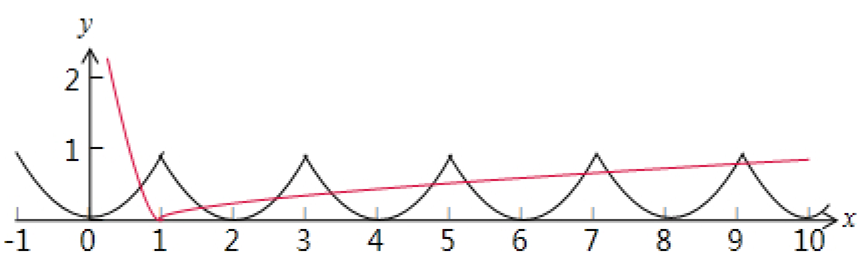
【答案】$[4,8)$

【考点分析】本题为中档题，考察了分段函数的单调性问题，不仅需要保证每段的函数单调递增，并且在 x=1 处也要满足递增的定义，故 $\begin{cases} a>1 \\ 4-\dfrac{a}{2}>0 \\ 4-\dfrac{a}{2}+2\le a \end{cases} \Rightarrow a\in[4,8)$

11．已知函数 $y=f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，且当 $x\in[-1，1]$ 时， $f(x)=2^{|x|}-1$，则函数 $F(x)=f(x)-|\lg x|$ 的零点有________________个.

【答案】10

【考点分析】本题为较难题，考察了函数与方程的数学思想，函数的周期性。研究 $f(x)$ 的性质后画出两个函数的图像：



，故最后零点个数为 10 个。

12．若实数 x_1 满足 $2x+2^x=5$， x_2 满足 $2x+2\log_2(x-1)=5$，则 $x_1+x_2=$________________.

【答案】$\dfrac{7}{2}$

【考点分析】本题为较难题，考察了函数与方程的数学思想，将两个方程分别化简为 $2^{x-1}=-x+\dfrac{5}{2}$ 和 $\log_2(x-1)=-x+\dfrac{5}{2}$，在坐标系中得到三个函数的图像，函数 $y=\log_2\left(x-1\right)$ 为函数 $y=\log_2 x$ 向右平移一个单位，函数 $y=2^{x-1}$ 为函数 $y=2^x$ 向右平移一个单位，则 $y=2^{x-1}$ 与 $y=2^x$ 关于 $y=x-1$ 对称，故计算两交点的中点：$\begin{cases} y=x-1 \\ y=-x+\dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{7}{4}$，$\therefore x_1+x_2=\dfrac{7}{2}$。

二、选择题（每题 4 分，共 16 分）

13．下列函数中，既是偶函数，又在区间 $\left(-\infty，0\right)$ 上是单调递增的是（　　）

A． $y=\dfrac{1}{x}$　　B． $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{|x|}$　　C． $y=\ln|x|$　　D． $y=x^3$

【答案】B

【考点分析】本题为基础题，考察了基本函数的奇偶性和单调性，AD 为奇函数，C 在 $\left(-\infty，0\right)$ 递减。

14．关于 x 的方程 $\sqrt{2x+1}=x+m$ 有两个不同的实数解，则实数 m 的取值范围是（　　）

A． $m\geqslant 1$ 或 $m<\dfrac{1}{2}$　　B． $m>1$ 或 $m\leqslant\dfrac{1}{2}$

C． $\dfrac{1}{2}<m\leqslant 1$　　D． $\dfrac{1}{2}\leqslant m<1$

【答案】D

【考点分析】本题为较难题，考察了方程解的个数，换元法。直接画图比较麻烦，所以用换元法，令 $t=\sqrt{2x-1}$，$t\geq 0$，则 $t^2-2t+2m-1=0$ 有两个不同的非负数根，则 $\begin{cases} \Delta>0 \\ t_1+t_2=2>0 \\ t_1t_2=2m-1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow m\in[\dfrac{1}{2},1)$

15．已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{a-x}{x-\left(a+1\right)}$，且 $y=f^{-1}\left(x-1\right)$ 的图象对称中心是 $\left(0，3\right)$，则 a 的值为（　　）

A． $\sqrt{2}$　　B． 2　　C． $\sqrt{3}$　　D． 3

【答案】B

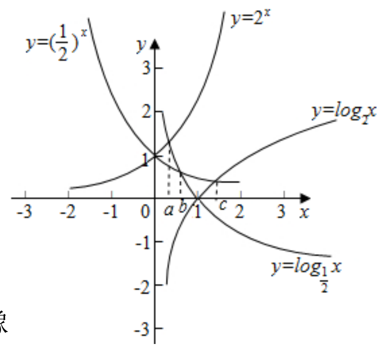
【考点分析】本题为中档题，考察了原函数与反函数的性质以及图像的平移。 $y=f^{-1}\left(x-1\right)$ 的图象对称中心是 $\left(0，3\right)$，则 $f^{-1}(x)$ 的对称中心为 $(-1,3)$，则 $f(x)$ 的对称中心为 $(3,-1)$，故 $a+1=3\Rightarrow a=2$

16．设a，b，c均为正数，且$2^a=\log_{\frac{1}{2}}a$，$\left(\frac{1}{2}\right)^b=\log_{\frac{1}{2}}b$，$\left(\frac{1}{2}\right)^c=\log_2 c$，则（　　）

A．$c<a<b$　　B．$c<b<a$　　C．$a<b<c$　　D．$b<a<c$

【答案】C

【考点分析】本题为中档题，考察了函数与方程的数学思想。在坐标系中分别画出$y=2^x$和$y=(\frac{1}{2})^x$和$y=\log_{\frac{1}{2}}x$和$y=\log_2 x$的图像



比较可得$a<b<c$

三、解答题（本题共 5 大题，满分 56 分）

17．（10 分）已知函数$f(x)=2+\log_3 x(1\leqslant x\leqslant 9)$，求函数$y=f^2(x)+f(3x)$的最大值和最小值.

【答案】最大值为 21，最小值为 7。

【考点分析】本题为中档题，考察了对数的运算法则，以及复合函数的值域问题，化简完毕后令$t=\log_3 x$，

$t\in[0,2]$，$y=t^2+5t+7$，即求二次函数在区间上的最值，比较对称轴与区间位置关系即可。

18．（10 分）设函数$f(x)=\dfrac{a\cdot e^x-1}{1+e^x}(a\in\mathbf{R})$是$R$上的奇函数.

（1）求a的值；

（2）求函数$f(x)$的反函数$f^{-1}(x)$的解析式；

（3）若$k\in\mathbf{R}^+$，解不等式$\ln\dfrac{1+x}{1-x}>\ln\dfrac{1+x}{k}$.

【答案】（1）1　（2）$y=f^{-1}(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x},x\in(-1,1)$

（3）①当0<k<2，　$x\in(-k+1,1)$　②当$k\geq 2$，　$x\in(-1,1)$

【考点分析】本题为中档题，考察了函数的奇偶性，反函数的求解步骤以及含参不等式的求解。第一小问定义域是一切实数故可用$f(0)=0$加检验的方法求得。第二问求反函数，先求值域再反解再交换 x 与 y。第三问根据对数函数的单调性以及定义域可得$x^2+kx+k-1>0$，讨论两根的大小关系，结合对数函数的定义域即可。

19．（12 分）若偶函数 $f(x)=x^{-\frac{1}{2}m^2+m+\frac{3}{2}}+1(m\in Z)$ 在 R^+ 上是增函数.

（1）确定函数 $y=f(x)$ 的解析式；

（2）求函数 $y=f(x)\left(x\in(-\infty, t]\right)$ 的最小值 $d(t)$ 的解析式；

（3）设 $g(x)=\sqrt{f(x)}-ax(a>1)$，证明：函数 $y=g(x)$ 在 R^+ 上是减函数.

【答案】（1） $f(x)=x^2+1$ （2） $d(t)=\begin{cases}t^2+1, t<0\\ 1, t\geq 0\end{cases}$ （3）证明过程略

【考点分析】本题为中档题，考察了幂函数的性质以及定轴动区间二次函数的最值问题以及单调性的证明。第一小问先确定指数大于 0，再确定指数为偶数可得。第二问讨论 t 与对称轴 x=0 的位置关系即可。第三问用定义证明单调性，化简过程中需要用到分子有理化，以及 $\sqrt{x_1^2+1}>x_1,\sqrt{x_2^2+1}>x_2$ 的放缩。

20．（12 分）对于在区间 $[m, n]$ 上有意义的两个函数 $f(x)$ 与 $g(x)$，如果对任意 $x\in[m, n]$，均有 $|f(x)-g(x)|\leqslant 1$ 成立，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[m, n]$ 上是亲近的，否则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[m, n]$ 上是非亲近的．现有两函数 $f_1(x)=\log_a(x-3a)$ 与 $f_2(x)=\log_a\dfrac{1}{x-a}(a>0, a\neq 1)$，给定区间 $[a+2, a+3]$.

（1）若 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 在给定区间 $[a+2, a+3]$ 上都有意义，求 a 的取值范围；

（2）试讨论 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 在给定区间 $[a+2, a+3]$ 上是否是亲近的.

【答案】（1） $a\in(0,1)$

（2）①当 $a\in(0,\dfrac{9-\sqrt{57}}{12}]$ 时， $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 在区间上亲近，②当 $a\in(\dfrac{9-\sqrt{57}}{12},1)$ 时， $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 在区间上不亲近。

【考点分析】本题为较难题，考察了对新概念的理解与转化能力，将本题的亲近概念转化为恒成立问题。第一小问两个对数函数的真数部分在 $x\in[a+2,a+3]$ 上恒大于 0 即可。第二小问转化为 $a\leq x^2-4ax+3a^2\leq\dfrac{1}{a}$ 在 $x\in[a+2,a+3]$ 恒成立问题，而对称轴 $x=2a<a+2$，故 $x^2-4ax+3a^2$ 在 $x\in[a+2,a+3]$ 单调递增，最小值 $\geq a$，最大值 $\leq\dfrac{1}{a}$ 求解即可。

21．（12 分）在 R 上的递减函数 $f(x)$ 满足：当且仅当 $x\in\mathbf{M}\subseteq R^+$，函数值 $f(x)$ 的集合为 $[0, 2]$ 且 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$；对 M 中的任意 x_1，x_2 都有 $f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$.

（1）求证：$\frac{1}{4}\in \mathbf{M}$，而$\frac{1}{8}\notin \mathbf{M}$；

（2）证明：$f\left(x\right)$在M上的反函数$f^{-1}\left(x\right)$满足$f^{-1}\left(x_1\right)\cdot f^{-1}\left(x_2\right)=f^{-1}\left(x_1+x_2\right)$；

（3）解不等式：$f^{-1}\left(x^2+x\right)\cdot f^{-1}\left(x+2\right)\leqslant \frac{1}{4}$，$\left(x\in\left[0，2\right]\right)$

【答案】（1） 证明过程略。 （2）证明过程略。 （3）$x\in\{-2,0\}$

【考点分析】本题是较难题，结合了抽象函数和函数的单调性和反函数的性质。第一小问根据$f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$求得$f(\frac{1}{4})=2\in[0,2]$，$f(\frac{1}{8})=3\notin[0,2]$。第二小问取$x_1,x_2\in[0,2]$，$y_1=f^{-1}(x_1)$，$y_2=f^{-1}(x_2)$，则$f(y_1)=x_1$，$f(y_2)=x_2$，代入条件即可。第三小问根据反函数性质得到$y=f^{-1}(x)$在$\left[0，2\right]$递减，$f^{-1}(2)=\frac{1}{4}$，由单调性性质配合定义域即可。