2014

高

考

数

学

预

测

卷

(文科)

2014年北京市高考模拟试卷

数学（文科）

第Ⅰ卷（选择题　共40分）

一、　　选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

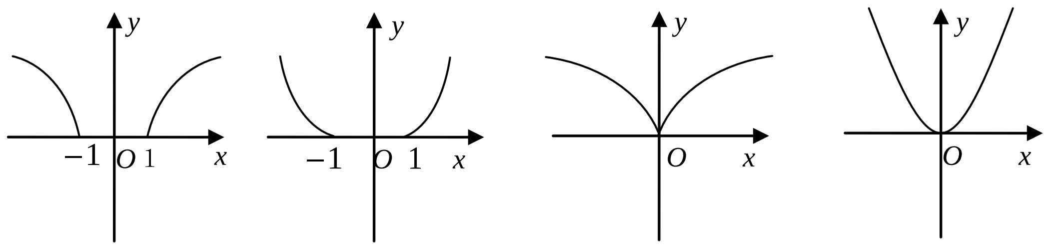
1．已知集合 A ＝ $\{x\,|\,|x|<2\}$，B ＝ $\{x\,|\,x^2-4x+3<0\}$，则 A$\bigcap$B 等于（　　）

（A）$\{x\,|\,-2<x<1\}$　（B）$\{x\,|\,1<x<2\}$　（C）$\{x\,|\,2<x<3\}$　（D）$\{x\,|\,-2<x<3\}$

2．设 $a=3^{0.5},\ b=\log_3 2,\ c=\cos\dfrac{2}{3}\pi$，则(　)

（A）$c<b<a$　（B）$c<a<b$　（C）$a<b<c$　（D）$b<c<a$

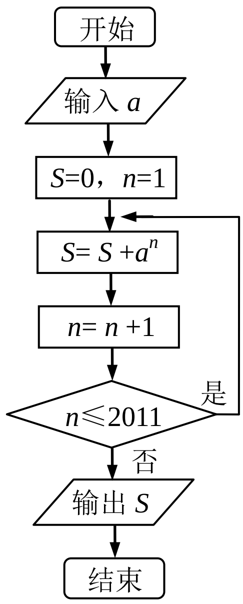
3. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=\ln(x+1)$，则函数 $f(x)$ 的大致图像为(　)



（A）　（B）　（C）　（D）

4. 程序框图如图所示，若输入 a 的值是虚数单位 i，则输出的结果是（　）

（A）-1　（B）$i-1$　（C）0　（D）$-i$



5. 命题“$\exists x_0\in\mathbf{R}$，$\log_2 x_0\le 0$”的否定为（　　）

（A）$\exists x_0\in\mathbf{R}$，$\log_2 x_0>0$　（B）$\exists x_0\in\mathbf{R}$，$\log_2 x_0\ge 0$

（C）$\forall x\in\mathbf{R}$，$\log_2 x\ge 0$　（D）$\forall x\in\mathbf{R}$，$\log_2 x>0$

6. 记集合 $A=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 4\}$ 和集合 $B=\{(x,y)\,|\,x+y-2\le 0, x\ge 0, y\ge 0\}$ 表示的平面区域分别为 Ω_1, Ω_2，若在区域 Ω_1 内任取一点 $M(x,y)$，则点 M 落在区域 Ω_2 内的概率为(　　)

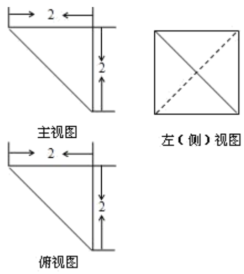
（A）$\dfrac{1}{2\pi}$　　（B）$\dfrac{1}{\pi}$　　（C）$\dfrac{1}{4}$　　（D）$\dfrac{\pi-2}{4\pi}$

7. 在△ABC 中，若 $\tan\dfrac{A-B}{2}=\dfrac{a-b}{a+b}$，则△ABC 的形状是（　　）

（A）直角三角形　（B）等腰三角　（C）等腰直角三角形　（D）等腰三角形或直角三角形

8. 一四面体的三视图如图所示，则该四面体四个面中最大的面积是（　　）

（A）2　　（B）$2\sqrt{2}$　　（C）$2\sqrt{3}$　　（D）$\sqrt{3}$

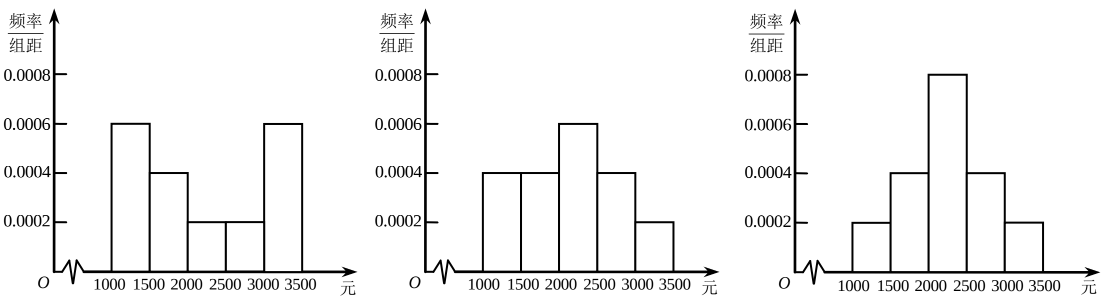


第Ⅱ卷（非选择题　共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9．抛物线 $y^2=4x$ 上一点 M 与该抛物线的焦点 F 的距离 $|MF|=4$，则点 M 的横坐标 $x=$________ .

10．为了解本市居民的生活成本，甲、乙、丙三名同学利用假期分别对三个社区进行了“家庭每月日常消费额”的调查.他们将调查所得到的数据分别绘制成频率分布直方图(如图所示)，记甲、乙、丙所调查数据的标准差分别为 s_1，s_2，s_3，则它们的大小关系为____________.（用“＞”连接）



甲　　乙　　丙

11．已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_2=1, S_5=10$，则 $S_7=$________.

12．已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}-1, & x\le 0\\ -x^2-2x, & x>0\end{cases}$，若 $f(a^2-2)>f(a)$，则实数 a 的取值范围是______.

13. 设不等式组$\begin{cases} x \ge 0, \\ y \ge 0, \\ y \le -kx+4k \end{cases}$在直角坐标系中所表示的区域的面积为$S$，则当$k>1$时，$\dfrac{kS}{k-1}$的最小值为________.

14．在平面直角坐标系xOy中，若直线$y=kx+1$与曲线$y=|x+\dfrac{1}{x}|-|x-\dfrac{1}{x}|$有四个公共点，则实数$k$的取值范围为________.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤．

15．（本小题满分 13 分）

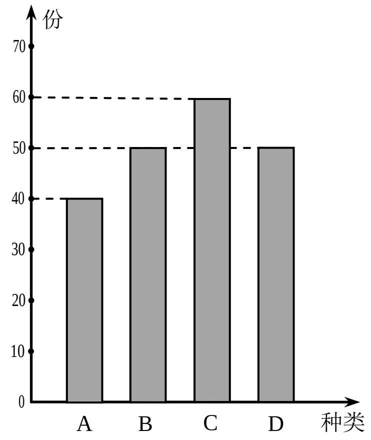
已知函数$f(x)=\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x-\dfrac{1}{2}$.

（Ⅰ）求$f(-\dfrac{\pi}{12})$的值；

（Ⅱ）若$x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$，求函数$y=f(x)$的最小值及取得最小值时的x值.

16.（本小题满分 13 分）

某学校餐厅新推出 A、B、C、D 四款套餐，某一天四款套餐销售情况的条形图如下．为了了解同学对新推出的四款套餐的评价，对每位同学都进行了问卷调查，然后用分层抽样的方法从调查问卷中抽取 20 份进行统计，统计结果如下面表格所示：



	满意	一般	不满意
A 套餐	50%	25%	25%
B 套餐	80%	0	20%
C 套餐	50%	50%	0
D 套餐	40%	20%	40%

（Ⅰ）若同学甲选择的是 A 款套餐，求甲的调查问卷被选中的概率；

（Ⅱ）若想从调查问卷被选中且填写不满意的同学中再选出 2 人进行面谈，求这两人中至少有一人选择的是 D 款套餐的概率.

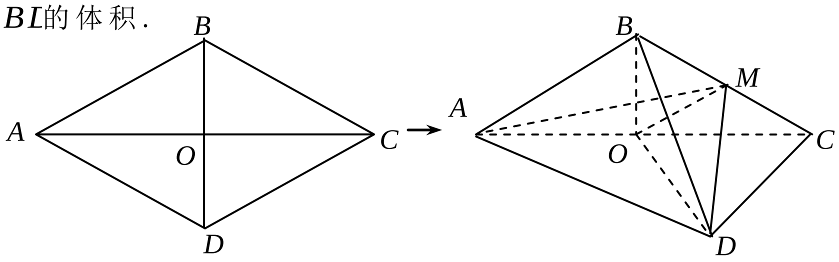
17.（本小题满分 14 分）

如图，菱形 $ABCD$ 的边长为 6，$\angle BAD=60^\circ$，$AC\cap BD=O$. 将菱形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折起，得到三棱锥 $B-ACD$，点 M 是棱 BC 的中点，$DM=3\sqrt{2}$.

（Ⅰ）求证：OM // 平面 ABD；

（Ⅱ）求证：平面 $ABC\perp$ 平面 MDC；

（Ⅲ）求三棱锥 $M-ABD$ 的体积.



18．（本小题满分 13 分）

已知 $f(x)=a\ln x-4x$， $g(x)=-x^3-x$

（1） 求 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程；

（2） 若 $\exists x_0\in[e,e^2]$ 使得 $f(x_0)<g(x_0)$ 成立，求实数 a 的取值范围，

19.（本小题满分 14 分）

在平面直角坐标系 xoy 中，已知 F_1,F_2 分别是椭圆 $\boldsymbol{G:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)}$ 的左、右焦点，椭圆 G 与抛物线 $y^2=-8x$ 有一个公共的焦点，且过点 $(-2,\sqrt{2})$.

(Ⅰ)求椭圆 $\boldsymbol{G}$ 的方程;

(Ⅱ)设直线 $\boldsymbol{l}$ 与椭圆 $\boldsymbol{G}$ 相交于 $\boldsymbol{A}$ 、$\boldsymbol{B}$ 两点, 若 $\boldsymbol{\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}}$（$\boldsymbol{O}$ 为坐标原点), 试判断直线 $\boldsymbol{l}$ 与圆 $\boldsymbol{x^2+y^2=\frac{8}{3}}$ 的位置关系，并证明你的结论.

20．（本小题满分 13 分）

已知数列$\{a_n\}$满足$a_1 = a,(a \in N^*)$， $S_n = pa_{n+1}(p \neq 0, p \neq -1, n \in N^*)$

（1） 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2） 对任意$k \in N^*$，若将$a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}$按从小到大的顺顺序排列后，此三项均能构成等差数列，且记公差为d_k.

i. 求 p 的值以及数列$\{d_k\}$的通项公式；

ii. 记数列$\{d_k\}$的前k项和为S_k，问是否存在正整数a，使得$S_k < 30$恒成立，若存在求出a的最大值；若不存在说明理由.

参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1．B	2．A	3．C	4． D
5．D	6．A	7． D	8． C

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9． 3　　10． $s_1>s_2>s_3$

11． 21　　12． $-1<a<2$

13． 32　　14． $\{-\frac{1}{8},0,\frac{1}{8}\}$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．其他正确解答过程，请参照评分标准给分.

15.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）$\because f(x)=\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x$

$=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$，　………………5 分

$\therefore f(-\frac{\pi}{12})=\sin(-2\times\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{6})=\sin(-\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$　.　………7 分

（Ⅱ）$\because 0\le x\le\frac{\pi}{2}$　　$\therefore 0\le 2x\le\pi$.

$\therefore -\frac{\pi}{6}\le 2x-\frac{\pi}{6}\le\frac{5\pi}{6}$.　…………9 分

$\therefore -\frac{1}{2}\le\sin(2x-\frac{\pi}{6})\le 1$，即 $-\frac{1}{2}\le f(x)\le 1$.　………11 分

$\therefore f(x)_{\min}=-\frac{1}{2}$　　此时 $2x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$　　$\therefore x=0$.　………12 分

$\therefore$ 当 $x=0$ 时，$f(x)_{\min}=-\frac{1}{2}$.　………………13 分

16.（本小题满分 13 分）

解:（Ⅰ）由条形图可得，选择 A，B，C，D 四款套餐的学生共有 200 人，　……………1 分

其中选 A 款套餐的学生为 40 人，　……………2 分

由分层抽样可得从 A 款套餐问卷中抽取了 $20\times\frac{40}{200}=4$ 份.　……………4 分

设事件 M =“同学甲被选中进行问卷调查”，　……………5 分

则 $P(M)=\frac{4}{40}=0.1$.　……………6 分

答：若甲选择的是 A 款套餐，甲被选中调查的概率是 0.1 .

(II) 由图表可知，选 A，B，C，D 四款套餐的学生分别接受调查的人数为 4，5，6，5. 其中不满意的人数分别为 1，1，0，2 个 . ……………7 分

记对 A 款套餐不满意的学生是 *a*；对 B 款套餐不满意的学生是 *b*；对 D 款套餐不满意的学生是 *c*，*d*. ……………8 分

设事件 N="从填写不满意的学生中选出 2 人，至少有一人选择的是 D 款套餐" …………9 分

从填写不满意的学生中选出 2 人，共有(a,b),(a,c),(a,d),(b,c),(b,d),(c,d)6 个基本事件，……10 分

而事件 N 有(a,c),(a,d),(b,c),(b,d),(c,d)5 个基本事件， …… …11 分

则 $P(N)=\frac{5}{6}$. …… …13 分

答：这两人中至少有一人选择的是 D 款套餐的概率是 $\frac{5}{6}$.

17.（本小题满分 14 分）

（Ⅰ）证明：因为点 O 是菱形 $ABCD$ 的对角线的交点，

所以 O 是 AC 的中点.又点 M 是棱 BC 的中点，

所以 OM 是 ΔABC 的中位线，$OM\,//\,AB$. ……………2 分

因为 $OM\not\subset$ 平面 ABD, $AB\subset$ 平面 ABD，

所以 $OM\,//$ 平面 ABD. ……………4 分

（Ⅱ）证明：由题意，$OM=OD=3$,

因为 $DM=3\sqrt{2}$,所以 $\angle DOM=90^\circ$，$OD\perp OM$. ……………6 分

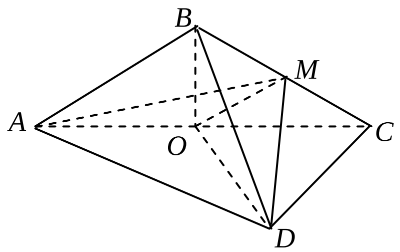
又因为菱形 $ABCD$，所以 $OD\perp AC$. …………7 分

因为 $OM\bigcap AC=O$,

所以 $OD\perp$ 平面 ABC ， ……………8 分

因为 $OD\subset$ 平面 MDO，

所以平面 $ABC\perp$ 平面 MDO. ……………9 分



（Ⅲ）解：三棱锥 $M-ABD$ 的体积等于三棱锥 $D-ABM$ 的体积. ……………10 分

由（Ⅱ）知，$OD\perp$ 平面 ABC，

所以 $OD=3$ 为三棱锥 $D-ABM$ 的高. ……………12 分

ΔABM 的面积为 $\frac{1}{2}BA\times BM\times\sin120^\circ=\frac{1}{2}\times6\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$， ……………13 分

所求体积等于 $\frac{1}{3}\times S_{\Delta ABM}\times OD=\frac{9\sqrt{3}}{2}$. ……………14 分

18.（本小题满分 13 分）

（1） $f'(x)=\frac{a}{x}-4$, …………………（1 分）

$f'(1)=a-4$, …………………（2 分）

故切线方程为 $y=(a-4)x-a$； …………………（4 分）

（2）$h(x)=a\ln x+x^2-4x+3$，

$h'(x)=\frac{a}{x}+2x-4=\frac{2x^2-4x+a}{x}$, …………………（6 分）

① 若 $\Delta=16-8a\le 0$，即 $a\ge 2$，则 $h'(x)\ge 0$，

则 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，又 $h(1)=0$，不符舍去. …………………（8 分）

②若 $\Delta>0$, 则 $a<2$, ,

令 $h'(x)>0$ 得 $x>1+\frac{\sqrt{4-2a}}{2}$,

令 $h'(x)<0$ 得 $0<x<1+\frac{\sqrt{4-2a}}{2}$,

则 $h(x)$ 在 $\left(0,1+\frac{\sqrt{4-2a}}{2}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(1+\frac{\sqrt{4-2a}}{2},+\infty\right)$ 单调递增,

…………………（10 分）

又 $h(1)=0$，则必有 $h(e)<0$， …………………（11 分）

即 $a+e^2-4e+3<0$， $a<-e^2+4e-3$. …………………（12 分）

19.（本小题满分 14 分）

解(Ⅰ)由已知得, .由题意得 $c=2$ ，又 $\frac{4}{a^2}+\frac{2}{b^2}=1$，………………………2 分

消去 a 可得， $b^4-2b^2-8=0$，解得 $b^2=4$ 或 $b^2=-2$（舍去），则 $a^2=8$，

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$. ………………………………………………………5 分

(Ⅱ)结论：直线 $\boldsymbol{l}$ 与圆 $\boldsymbol{x^2+y^2=\frac{8}{3}}$ 相切.

证明:由题意可知,直线 $\boldsymbol{l}$ 不过坐标原点,设 $\boldsymbol{A,B}$ 的坐标分别为 $\boldsymbol{(x_1,y_1),(x_2,y_2),(y_1>y_2)}$

(ⅰ)当直线 $l\perp x$ 轴时,直线 l 的方程为 $x=m(m\neq 0)$ 且 $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$

则 $x_1=m,y_1=\sqrt{4-\frac{m^2}{2}},x_2=m,y_2=-\sqrt{4-\frac{m^2}{2}}$

$\because \overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$ $\therefore x_1x_2+y_1y_2=0$ $\therefore m^2-(4-\frac{m^2}{2})=$

解得 $m=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$，故直线 l 的方程为 $x=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$ ，

因此,点 $O(0,0)$ 到直线 l 的距离为 $d=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，又圆 $x^2+y^2=\frac{8}{3}$ 的圆心为 $O(0,0)$,

半径 $r=\frac{2\sqrt{6}}{3}=d$ 所以直线 l 与圆 $x^2+y^2=\frac{8}{3}$ 相切 …8 分

(ⅱ)当直线 l 不垂直于 x 轴时,

设直线 l 的方程为 $y=kx+n$，联立直线和椭圆方程消去 y 得；

得 $(1+2k^2)x^2+4knx+2n^2-8=0$ ，

$\therefore x_1+x_2=\frac{-4kn}{1+2k^2},x_1x_2=\frac{2n^2-8}{1+2k^2}$

$y_1y_2=(kx_1+n)(kx_2+n)=k^2x_1x_2+nk(x_1+x_2)+n^2=\frac{n^2-8k^2}{1+2k^2}$

$\because \overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$ $\therefore x_1x_2+y_1y_2=0$，故 $\frac{2n^2-8}{1+2k^2}+\frac{n^2-8k^2}{1+2k^2}=0$,

即 $3n^2-8k^2-8=0,3n^2=8k^2+8$ ① ……………………………………………11 分

又圆 $x^2+y^2=\frac{8}{3}$ 的圆心为 $O(0,0)$,半径 $r=\frac{2\sqrt{6}}{3}$,

圆心 O 到直线 l 的距离为 $d=\frac{|n|}{\sqrt{1+k^2}}$,

$\therefore d^2=\left(\frac{|n|}{\sqrt{1+k^2}}\right)^2=\frac{n^2}{1+k^2}=\frac{3n^2}{3(1+k^2)}$ ②

将①式带入②式得： $d^2=\frac{8k^2+8}{3(1+k^2)}=\frac{\,}{3}$， 所以 $d=\frac{2\sqrt{6}}{3}=r$ 因此,直线 l 与圆

$\boldsymbol{x^2+y^2=\frac{8}{3}}$相切　　………………14 分

20.（本小题满分 13 分）

解：（1）$\because S_n=pa_{n+1}(p\neq 0,p\neq -1,n\in N^*)$

$\therefore$当$n\geqslant 2$时，有$S_{n-1}=pa_n$，$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{p+1}{p}(n\geqslant 2)$……………………2 分

所以数列$\{a_n\}$从第二项起是公比为$\frac{p+1}{p}$的等比数列；

当$n=1$时，$a_1=pa_2$，而$p\neq 0,a_1=a$，可得$a_2=\frac{a}{p}$

所以$a_n=\begin{cases}a, & n=1\\ \frac{a}{p}(\frac{p+1}{p})^{n-2}, & n\geqslant 2\end{cases}$……………………4 分

（2）

i．由（1）知$a_{k+1}=\frac{a}{p}(\frac{p+1}{p})^{k-1},a_{k+2}=\frac{a}{p}(\frac{p+1}{p})^{k},a_{k+3}=\frac{a}{p}(\frac{p+1}{p})^{k+1}$

若a_{k+1}为等差中项则$2a_{k+1}=a_{k+2}+a_{k+3}$，解得：$p=-\frac{1}{3}$

若a_{k+2}为等差中项则$2a_{k+2}=a_{k+1}+a_{k+3}$，解得：$p\in\phi$

若a_{k+3}为等差中项则$2a_{k+3}=a_{k+1}+a_{k+2}$，解得：$p=-\frac{2}{3}$

综上所述$p=-\frac{1}{3}$或者$p=-\frac{2}{3}$…………………6 分

当$p=-\frac{1}{3}$时，$a_{k+1}=-3a(-2)^{k-1},a_{k+2}=-3a(-2)^{k}$，注意到$(-2)^{k-1}$与$(-2)^k$异号，

$d_k=|a_{k+1}-a_{k+2}|=9a\cdot 2^{k-1}$…………………7 分

当$p=-\frac{2}{3}$时，$a_{k+1}=\frac{-3a}{2}(-\frac{1}{2})^{k-1},a_{k+3}=\frac{-3a}{2}(-\frac{1}{2})^{k}$注意到$(-\frac{1}{2})^{k-1}$与$(-\frac{1}{2})^{k+1}$同号，

$d_k=|a_{k+1}-a_{k+3}|=\frac{9a}{8}(\frac{1}{2})^{k-1}$…………………8 分

综上所述：当$p=-\frac{1}{3}$时$d_k=9a(2)^{k-1}$；当$p=-\frac{2}{3}$时$d_k=\frac{9a}{8}(\frac{1}{2})^{k-1}$…………………9 分

ii 当$p=-\frac{1}{3}$时$d_k=9a(2)^{k-1}$ $\therefore S_k=9a(2^k-1)$，则由$S_k<30$，得$a<\frac{10}{3(2^k-1)}$，当$k\geqslant 3$时

$\frac{10}{3(2^k-1)}<1$，$\therefore a<1$这时不存在符合题意的最大正整数a；…………………10 分

当 $p=-\frac{2}{3}$ 时 $\because d_k=\frac{9a}{8}(\frac{1}{2})^{k-1}$ $\therefore S_k=\frac{9a}{4}(1-(\frac{1}{2})^k)$ 则由 $S_k<30$，得 $a<\frac{40}{3(1-(\frac{1}{2})^k)}$

$\because \frac{40}{3(1-(\frac{1}{2})^k)}>\frac{40}{3}$，$\therefore a=13$ 时，满足 $S_k<30$ 恒成立，当 $a\geqslant 14$ 时，存在 $k\in N^*$，使得 $a>\frac{40}{3(1-(\frac{1}{2})^k)}$ 即 $S_k>30$，所以当 $a\geqslant 14$ 时 $S_k<30$ 不恒成立……………………12 分

综上所述：当 $p=-\frac{2}{3}$ 时存在满足题意的最大正整数 $a=13$ ………………… 13 分